

מכניקה קלאסית

פרק 15 - מומנט התמד

תוכן העניינים

1. הקדמה - גוף קשיח וציר סיבוב (ללא ספר)
2. מומנט התמד, הסבר בסיסי וחשוב עבור גוף נקודת (ללא ספר)
3. משפט שטיינר (ללא ספר)
4. אדטיביות 1
5. $I_z = I_x + I_y$ (ללא ספר)
6. סימטריה ל z (ללא ספר)
7. חישוב מומנט ההתמד של דיסקה סביב ציר Z וציר X (ללא ספר)
8. תרגילים שונים לחישוב מומנט התמד 2
9. מומנט ההתמד כמטריצה 5

אדטיביות:

שאלות:

(1) דוגמה

לדסקה בעלת מסה M ורדיוס R מחברים דסקה נוספת זהה בקצה התחתון של הדסקה. מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר המאונך למישור הדסקה והעובר בקצה העליון של הדסקה (הראשונה).



תשובות סופיות:

$$I = 11mR^2 \quad (1)$$

תרגילים שונים לחישוב מומנט התמד:

שאלות:



- (1) חישוב אינטגרל של מוט לא אחיד
חשב את מומנט ההתמד של מוט עם צפיפות ליחידת

$$\text{אורך } \lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L} \text{ סביב קצה המוט.}$$

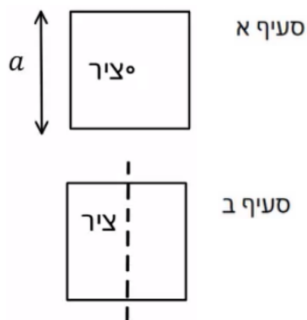
x הוא המרחק מהקצה, L הוא אורך המוט ו- λ_0 נתון.

$$m, l, \lambda = Ax^2$$

- (2) חישוב נוסף מוט בצפיפות לא אחידה
מצא את מומנט ההתמד של מוט סביב מרכזו לפי
הנתונים שבשרטוט.
הצפיפות הנתונה מתייחסת למרכז המוט כראשית הצירים.



- (3) שלושה מוטות מחוברים בקצה
שלושה מוטות זהים באורך l ומסה m כל אחד מחוברים
באופן המוצג באיור.
מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר הנמצא
בנקודת החיבור בין המוטות ובמאונך למישור.



- (4) מסגרת ריבועית
נתונה מסגרת ריבועית בעלת אורך צלע a ומסה M .
מצא את מומנט ההתמד של מסגרת.
א. סביב ציר העובר במרכז ומאונך למישור המסגרת.
ב. סביב ציר העובר במרכז המסגרת ודרך מרכז שתי
צלעות ומקביל לשתי הצלעות האחרות.



- (5) מומנט התמד של שער חשמלי
מצא את מומנט ההתמד של שער חשמלי בעל מסה m
ואורך l אשר בסופו מחוברת משקולת בעלת מסה M
ואורך L המסתובב סביב מרכז המסה שלו.



- (6) מומנט התמד של ריש
מצא את מומנט ההתמד של הגוף שבשרטוט סביב מרכז המסה
שלו בשתי דרכים שונות. אורך כל מוט l ומסתו m .

(7) דיסקה עם חור

- א. מצא את מומנט ההתמד של דיסקה בעלת מסה M ורדיוס R , אם ידוע כי במרחק R חצי ממרכז הדיסקה קדחו חור ברדיוס רבע R . הדיסקה מסתובבת סביב ציר במרכזה (ולא במרכז המסה של המערכת).
- ב. מצא את מומנט ההתמד של הגוף סביב מרכז המסה שלו.

(8) חצי חישוק ושתי מסות

- מצא את מומנט ההתמד של חצי החישוק שבתמונה. רדיוסו R , מסתו M ובקצותיו חוברו שתי מסות m . החישוק סובב סביב מסמר בקודקודו.

(9) חישוב אינטגרל של ריבוע

- חשב את מומנט ההתמד של לוח ריבוע בעל אורך צלע a , מסה M וצפיפות אחידה בכל אחד מהמצבים הבאים:
- א. ציר הסיבוב הוא אחת הפאות של הריבוע.
- ב. ציר הסיבוב מקביל לפאות ועובר במרכז.
- ג. ציר הסיבוב אנך למשטח הריבוע ועובר במרכזו.

(10) מומנט התמד של משולש

- מצא את מומנט ההתמד של המשולש סביב קודקודו הישר.

(11) מומנט התמד של כדור מלא

- חשב את מומנט ההתמד של כדור מלא בעל רדיוס R , מסה M וצפיפות אחידה, סביב ציר העובר במרכז הכדור.

(12) מומנט התמד של קליפה כדורית

- מצאו את מומנט ההתמד של קליפה כדורית ברדיוס R ומסה m סביב ציר העובר דרך מרכז המסה של הקליפה.

תשובות סופיות:

$$I_0 = M \frac{L^2}{2} \quad (1)$$

$$I = \frac{12ml^2}{80} \quad (2)$$

$$I_{c.m.} = ml^2 \quad (3)$$

$$I = \frac{M}{8} \left(a^2 + \frac{l^2}{3} \right) \quad \text{ב.} \quad I_{c.m.} = \frac{M}{4} \left(\frac{l^2}{3} + a^2 \right) \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$I = \left(\frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{m \cdot 0 + \frac{M(1+L)}{2}}{m+M} \right)^2 \right) + \left(\frac{1}{12} (L^2 + L^2) M + M \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{m \cdot 0 + \frac{M(1+L)}{2}}{m+M} \right) + \frac{L}{2} \right)^2 \right) \quad (5)$$

$$I = \frac{5}{12} ml^2 \quad (6)$$

$$I_0 = I_{c.m.} + \frac{15}{16} M \cdot \left(\frac{R}{30} \right)^2 \quad \text{ב.} \quad I_0 = \frac{247}{512} MR^2 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$I_1 = I_{c.m.} + m'b^2 \quad (8)$$

$$I = M \frac{1}{6} a^2 \quad \text{ג.} \quad I = \frac{1}{12} Ma^2 \quad \text{ב.} \quad I = \frac{1}{3} Ma^2 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$I_0 = \frac{1}{6} m(a^2 + b^2) \quad (10)$$

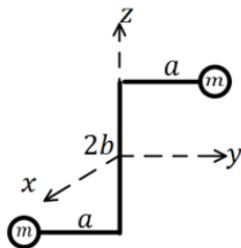
$$I = \frac{2}{5} MR^2 \quad (11)$$

$$\frac{2MR^2}{3} \quad (12)$$

מומנט ההתמד כמטריצה:

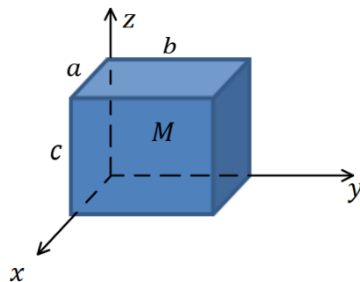
שאלות:

(1) דוגמה-מנואלה



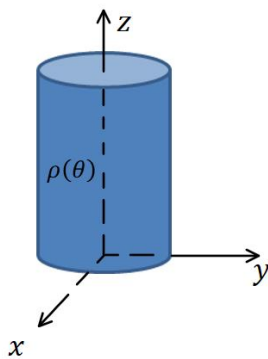
- שתי מסות נקודתיות זהות m מחוברות על ידי מוטות חסרי מסה כפי שנראה באיור. אורך המוט המרכזי הוא $2b$ ואורך כל מוט המחובר לכדור הוא a .
 א. מצא את כל מטריצת מומנט ההתמד של המערכת.
 ב. מצא את התנע הזוויתי של המערכת ברגע המתואר באיור אם המהירות הזוויתית היא $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.

(2) דוגמה-מומנט התמד של קובייה



- חשב את המומנט התמד של קובייה בעלת מסה M המפולגת באופן אחיד. ראשית הצירים נמצאת בפינת הקובייה, צלעות הקובייה מקבילים לצירים ואורכייהם: a, b, c . ראה איור.

(3) גליל עם צפיפות התלויה בזווית



- לגליל בעל רדיוס R וגובה H יש צפיפות מסה התלויה בזווית $\rho(\theta) = \rho_0(1 + \sin \theta)$ כאשר θ היא הזווית ביחס לציר x בקואורדינטות גליליות.
 א. מהי המסה הכוללת של הגליל?
 ב. מצא את מיקום מרכז המסה של הגליל.
 ג. חשב את: I_{zz}, I_{xz}, I_{yz} .
 ד. חשב את התנע הזוויתי של הגליל כאשר הוא מסתובב במהירות זוויתית $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.
 ה. מדוע יש הבדל בין התנע הזוויתי של הגליל בכיוונים x ו- y .

תשובות סופיות:

$$\vec{L} = -2mab\omega\hat{y} + 2ma^2\omega\hat{z} \quad \text{ב.} \quad I = 2m \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & -ab \\ 0 & -ab & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$I = M \begin{pmatrix} \frac{b^2c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$y_{c.m.} = \frac{R}{3}, \quad x_{c.m.} = 0, \quad z_{c.m.} = \frac{H}{2} \quad \text{ב.} \quad M = \rho_0 \pi R^2 H \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$I_{zz} = \frac{\pi R^4 H \rho_0}{2}, \quad I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = -\frac{\pi R^3 H^2 \rho_0}{6} \quad \text{ג.}$$

$$L_x = 0, \quad L_y = -\frac{\pi R^3 H^2 \rho_0}{6} \omega, \quad L_z = \frac{\pi R^4 H \rho_0}{2} \omega \quad \text{ד.}$$

ה. מכיוון שאנו מחשבים את התנ"ז רק ברגע מסוים והתפלגות המסה אינה סימטרית בין x ל- y אז יש הבדל בין התנ"ז של כל ציר. בממוצע של זמן מחזור שלם התנ"ז יהיה זהה לכל ציר.